

УДК 517.958:539.3

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК С РАЗРЕЗАМИ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

*Н.И. Ободан, Н.А. Гук*

### Аннотация

Рассматривается задача определения распределения напряжений в окрестности разреза. Состояние оболочки с разрезом представляется как результат двух воздействий - нагрузки и возмущения, связанного с наличием разреза. Оба состояния рассматриваются одновременно. Наличие разреза моделируется фиктивной деформацией, приложенной на берегах разреза. Обратная задача формулируется в вариационной постановке. Приводятся результаты влияния нелинейности и уровня действующей нагрузки на значение коэффициента концентрации напряжений.

**Ключевые слова:** тонкостенная оболочка, разрез, нелинейное напряженно-деформированное состояние, обратная задача, коэффициент концентрации напряжений.

### 1. Постановка задачи

Для описания процесса деформирования тонкостенной оболочки с разрезом используется система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, построенная на основе нелинейных геометрических соотношений теории пологих оболочек:

$$G(U(X)) = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$L_{\Gamma}(U(X, H)) = 0, \quad (2)$$

здесь  $X = \{x, y, z\}$  – вектор пространственных координат;  $G(\cdot)$ ,  $L_{\Gamma}(\cdot)$  – заданные дифференциальные операторы, которые действуют в области  $\Omega$ , занятой оболочкой, и на контуре  $\Gamma$  области  $\Omega$  соответственно;  $U(X)$  – вектор-функция перемещений в направлениях  $x, y, z$ .

На берегах разреза формулируются условия:

на поперечном разрезе  $x = x_p$

$$\begin{aligned} T_{11}(x_p, y) = 0; \quad T_{12}(x_p, y) = 0, \\ M_{11}(x_p, y) = 0; \quad Q_1(x_p, y) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

на продольном разрезе  $y = y_k$

$$\begin{aligned} T_{22}(x, y_k) = 0; \quad T_{12}(x, y_k) = 0 \\ M_{22}(x, y_k) = 0; \quad Q_2(x, y_k) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  – тангенциальные усилия, изгибающие и крутящие моменты;  $Q_i$  – поперечные силы, выраженные через перемещения.

Необходимо построить картину НДС описанной оболочки при выполнении условий (3), (4) во всей области изменения нагрузки, такой, что не вызывает пересечения берегов разреза.

## 2. Математическая модель

Для определения действительного НДС в зоне разреза используется постановка, предложенная в работе [1].

НДС оболочки с разрезом представляется как результат двух воздействий – нагрузки и возмущения, связанного с наличием разреза. Необходимо отметить, что в силу нелинейности задачи оба состояния рассматриваются одновременно, а не в виде суммы независимых слагаемых. Наличие разреза моделируется фиктивной деформацией, приложенной на берегах разреза, которая определяется из условий (3), (4). В качестве фиктивных деформаций выступают деформация срединной поверхности  $\varepsilon_{ij}^0$  и кривизна срединной поверхности  $k_{ij}^0$ .

Если разрез расположен на линии  $x = x_p$ , то

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^0 &= [u(y)]_l \delta(x - x_p) + \frac{\partial w}{\partial x} [w(y)]_l \delta(x - x_p) + \frac{1}{2} [w(y)]_l^2 \delta(x - x_p); \\ \varepsilon_{22}^0 &= 0; \quad \varepsilon_{12}^0 = [v(y)]_l \delta(x - x_p) + \frac{\partial w}{\partial x} [w(y)]_l \delta(x - x_p); \\ k_{11}^0 &= -[q_1(y)]_l \delta(x - x_p) + [w(y)]_l \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_p); \\ k_{22}^0 &= 0; \quad k_{12}^0 = -\frac{\partial}{\partial y} [w(y)]_l \delta(x - x_p),\end{aligned}$$

где  $u, v, w$  – перемещения в направлениях  $x, y, z$ ;  $\theta_i$  – угол поворота.

При разрезе, расположенном вдоль линии  $y = y_k$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^0 &= 0; \quad \varepsilon_{22}^0 = [v(x)]_q \delta(y - y_k); \\ \varepsilon_{12}^0 &= [u(x)]_q \delta(y - y_k); \\ k_{11}^0 &= 0; \quad k_{22}^0 = -[q_2(x)]_q \delta(y - y_k) + [w(x)]_q \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - y_k); \\ k_{12}^0 &= -\frac{\partial}{\partial x} [w(x)]_q \delta(y - y_k)\end{aligned}$$

Скачки перемещений на берегах разреза имеют вид:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi^+(x, y_k + 0) - \phi^-(x, y_k - 0), \quad \forall x \in l \\ \phi(y) &= \phi^+(x_p + 0, y) - \phi^-(x_p + 0, y), \quad \forall y \in q \\ l_1 \leq y \leq l_2, q_1 \leq x \leq q_2, l &= [l_1, l_2], q = [q_1, q_2].\end{aligned}$$

Таким образом, в качестве неизвестных фиктивных воздействий выступают скачки перемещений  $u^* = [u], v^* = [v], w^* = [w], \theta_1^* = [\theta_1], \theta_2^* = [\theta_2]$  на соответствующих берегах разрезов, а в качестве известных условий – условия (3), (4).

Сформулируем задачу об определении неизвестной вектор-функции  $H = \{u^*, v^*, w^*, \theta_1^*, \theta_2^*\}$ , как обратную задачу, при этом будем использовать ее вариационную формулировку. Тогда неизвестные скачки перемещений можно определить условия

$$\tilde{H} = \underset{\tilde{H} \in \bar{H}}{\operatorname{argmin}} J(\tilde{H}, U) \quad (5)$$

Для случая поперечного разреза функционал задачи (5) представляется в виде:

$$J = \int_{l_1}^{l_2} \left( T_{11}^2(H) + T_{12}^2(H) + M_{11}^2(H) + Q_1^2(H) \right) dy,$$

для случая продольного разреза в виде:

$$J = \int_{q_1}^{q_2} \left( T_{22}^2(H) + T_{12}^2(H) + M_{22}^2(H) + Q_2^2(H) \right) dx,$$

где значения функций  $T_{ij}$ ,  $M_{ij}$ ,  $Q_i$ , вычисленные через перемещения, являются решением прямой задачи (1), (2) при фиксированных значениях компонент вектор-функции  $H = \{u^*, v^*, w^*, q_1^*, q_2^*\}$ .

### 3. Метод решения

В качестве метода решения прямой задачи используется метод конечных элементов. Для описания неизвестных функции прямой и обратной задачи  $U(X)$ ,  $H(X)$  используются соответствующие аппроксимации через их узловые значения. Сетки для решения прямой задачи теории оболочек и обратной задачи генерировались автоматически со сгущением в области разреза, шаг дискретизации определялся выполнением условия достижения заданной точности решения, в окрестности разреза размер элемента составлял  $0.05l$ .

После выполнения процедуры метода Рунге была получена система нелинейных уравнений для определения узловых значений перемещений в виде:

$$K(U, H) = R_0 + R(H) \quad (6)$$

где  $U = \{U_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$  - вектор узловых перемещений;  $R_0$  и  $R(H)$  - проекция вектора нагрузок и неизвестных как начальных деформаций  $\varepsilon_{ij}^0$ ,  $\kappa_{ij}^0$  [1];  $K$  - нелинейная матрица жесткости;  $N$  - число узлов конечно-элементной модели оболочки. Для решения нелинейной системы алгебраических уравнений будем использовать итерационный процесс  $U^{(n)} = U^{(n-1)} + \Delta U^{(n)}$

$$K(U^0) = R_0; \quad (7)$$

$$K(U^{(n-1)}, H^{(n-1)}) \Delta U^{(n)} = \Delta R^{(n)}(U^{(n-1)}, \Delta H^{(n)}) \quad (8)$$

где  $H^{(n)}$  определяется из условия (5) при  $U = U^{(n-1)}$  с помощью метода Ньютона как  $H^{(n)} = H^{(n-1)} + \Delta H^{(n)}$ .

Приращения к компонентам вектора начального приближения  $\Delta H^{(n)}$  определяются с использованием итерационной формулы:

$$\Delta H^{(n)} = -Q|_{H^{(n-1)}} H^{(n-1)}, \quad (9)$$

где  $Q = (G^T G)^{-1}$ ;  $G = \left\| \frac{\partial H_i}{\partial H_j} \right\|$ ;  $j = \overline{1, P}$ ;  $P$  - число узлов конечно-элементной сетки на берегу разреза;  $n$  - номер итерации метода Ньютона; итерационный процесс продолжается до выполнения условия (3) или (4) с заданной точностью.

Матричные уравнения (7), (8) решаются с помощью пакета COSMOS методом продолжения по параметру.

### 4. Анализ полученных результатов

С помощью предлагаемого алгоритма проведен численный эксперимент для оболочки  $L/R = 3$ ;  $R/h = 70$ ;  $R = 70 \text{ мм}$ ;  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ;  $\mu = 0,3$ , имеющей поперечный разрез длиной  $2l$  и находящейся под действием осевого сжатия

$P$ . При различных значениях длины разреза  $2l$  ( $l/\pi R = 0,025; 0,065; 0,105$ ) исследовалось влияние учета нелинейности и, соответственно, уровня нагрузки, на значение коэффициента концентрации напряжений. Для сравнения были выполнены аналогичные расчеты с помощью пакета COSMOS без учета условия (3).

На рис. 1, 2 приведены значения начальных деформаций  $\varepsilon_{11}^0$  в зависимости от уровня нагружения. Рассмотрены различные уровни нагружения: (1) –  $P = 0,1P_{кр}$ ; (2) –  $P = 0,5P_{кр}$ ; (3) –  $P = 0,9P_{кр}$ , где  $P_{кр}$  – значение критической нагрузки тонкостенной оболочки, полученное в расчете для каждого размера разреза.

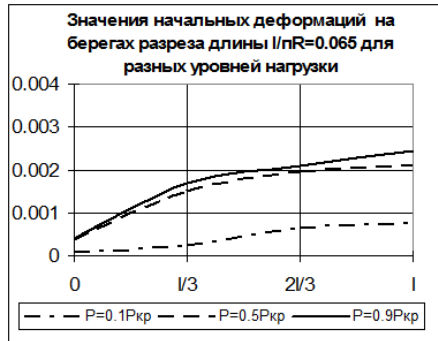


Рис. 1.

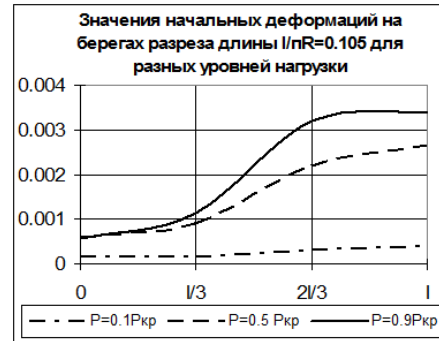


Рис. 2.

На рис. 3 и рис. 4 приведены зависимости коэффициента концентрации напряжений  $k_1$  от уровня нагружения и относительной длины разреза соответственно. Построенные на рис. 4 зависимости соответствуют расчетам, выполненным для разных уровней действующей нагрузки с учетом условия (3) (на рис. 4 обозначены сплошными линиями), и с использованием пакета COSMOS без учета этого условия (на рис. 4 обозначены пунктирными линиями). Максимальное напряжение  $\sigma_{11}$  определялось как среднее из значений напряжений на элементах, прилегающих к вершине трещины на расстоянии  $\sqrt{l/\pi R}$ .

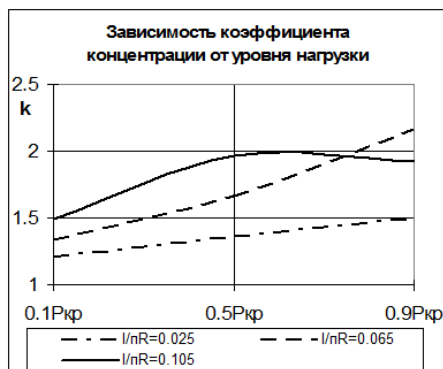


Рис. 3.

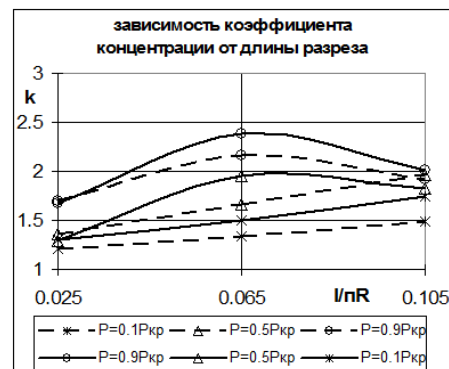


Рис. 4.

Из приведенных графиков видно, что расчет, выполненный без учета условия

(3), дает более низкие значения концентрации напряжений. При этом характер зависимости от уровня нагружения сохраняется, а значения коэффициента  $k_1$  зависят от уровня нагружения. Немонотонная зависимость  $k_1$  от длины разреза проявляется при значении  $l/\pi R = 0,065$ . Необходимо отметить, что именно этот размер разреза равен длине полуволны, характеризующей прогиб оболочки. Анализ полученных результатов показывает, что здесь также сохраняются свойства тонкостенных оболочек, присущие любой неосесимметричной деформации [6], и состоящие в немонотонной зависимости НДС от уровня нагрузки в области нагрузок близких к критическим значениям. Таким образом, при решении задачи о старте трещины в тонкостенной системе необходимо учитывать уровень нагружения (его близость к критическим значениям). При выполнении численных расчетов для описания поведения на берегах разреза, необходимо использовать модель свободного края типа (3), (4), в отличие от стандартных моделей, использующих только условие свободы перемещений по линии трещины.

### Summary

*N.I. Obodan, N.A. Guk.* Determining a nonlinear stress-strain state of shell with cuts by the method of inverse problem.

The problem of determining the stress distribution in the vicinity of the cut for thin-walled shell is considered. As a result of the two components - stress and perturbation associated with the presence of the cut the state of the shell with cuts is described. Both conditions are considered simultaneously. The fictitious deformation, which applied to the edges of the cut, the availability of the cut is simulated. In the variation formulation the inverse problem is presented. The dependences of level of the load on the stress concentration factor values are presented.

**Key words:** thin-walled shell, cuts, nonlinear stress-strain state, inverse problem, stress concentration factor

### Литература

1. *Осадчук В.А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В.А. Осадчук. – К.: Наукова думка. – 1985. – 221 с.
2. *Шевченко В. П., Довбня К. М.* Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статистики пологих орто-тропних оболонок із розрізами й отворами / В. П. Шевченко, К. М. Довбня // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 47–59.
3. *Kovtunen V.A.* Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with non-penetration // IMA J. Appl. Math. – 2006. – V. 71. – pp. 635–657.
4. *Skallerud B.* Thin shell and surface crack finite elements for simulation of combined failure modes / B. Skallerud, K. Holthe, B. Haugen // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2005. – Vol. 194. – P. 2619–2640.
5. *Tajdari M.* Numerical and experimental investigations on buckling of steel cylindrical shells with triangular cutout subject to axial compression / M. Azimi, M. Khorram, J. Eskandari Jam // Modares Mechanical Engineering Journal. – Vol. 13. – No. 1. – 2013 pp. 24–37.
6. *Obodan Natalia I.* Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O.G. Le-bedejev, V.A. Gromov // Springer. – 2013. – 180 p.

---

**Ободан, Наталья Ильинична** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной математики и математической кибернетики Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара

Е-mail: *vobodan@mail.ru*

**Гук, Наталия Анатольевна** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных технологий Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара

Е-mail: *nataly-guk@rambler.ru*